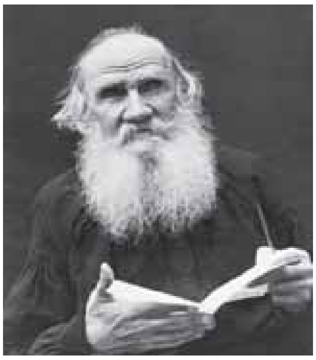
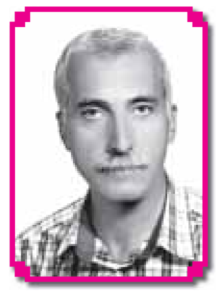
چقدر زمین می‌خواهی؟!



اشاره

اگر اهل مطالعه و علاقه‌مند به داستان و رمان باشید، احتمالاً با نام *لئون تولستوی*، نویسندهٔ بزرگ روسی (۱۹۱۰–۱۸۲۸)، آشنا هستید و رمان‌های معروف او، «جنگ و صلح» و «آنا کارنینا» را می‌شناسید و شاید هم خوانده باشید. اما تولستوی علاوه بر ادبیات، در تمام عمر به ریاضیات عملی و ســـرگرمی‌های ریاضی علاقهٔ خاصی داشت و گاه مسائلی هم طرح می‌کرد. به‌خصوص در دوره‌ای که برای کمک به مردم روستاهای کشورش دست به کار تأسیس مدارس روستایی زد و کتاب الفبا را برای آموزش آن‌ها نوشت و در آن مسئله‌هایی به عنوان تفریح و اندیشیدن مطرح کرد. یکی از مسائل این کتاب چنین است: «از بین سه شکل مربع، شش ضلعی و دایره با محیط ثابت، کدام یک دارای مساحت بیشتری است؟»



حسین کریمی

پیـــش از پرداختن به مســـئلهٔ فوق، بد نیســـت به یکی از داستان‌های کوتاه تولســـتوی به نام «یک آدم چقدر زمین می‌خواهد؟» اشـــاره کنیم. این داستان کوتـــاه و بســـیار زیبا بـــا ترجمهٔ **وحید نیکخواه آزاد**، نخســـتین‌بار در ســـال ۱۳۵۹، توســـط مجلهٔ «کیهان بچه‌ها» منتشر شـــد و مطالعهٔ آن را (که نسخه الکترونیکـــی آن را در اینترنت می‌توانید بیابید) به شـــما توصیه می‌کنیم. در این داستان دهقانی فقیر به نام **پاهوم** با تلاش زیاد صاحب زمین می‌شـــود و هر چند وقت یک‌بار زمینش را گســـترش می‌دهد. رفته‌رفته طمع داشتن زمین بزرگ‌تر او را به مهاجرت به شـــهرهای دورتر می‌کشاند تا در نهایت به جایی می‌رود که در آنجا زمین رایگان است و او می‌تواند با حرکت کردن از یک نقطه و بازگشـــت به همان‌جا، محیطـــی را طی کند و تمام زمین‌هـــای محصور در آن محیط به خودش تعلق گیرد! فقط مدت زمان حرکت محدود اســـت به زمان طلوع تا غروب خورشید. شهود ریاضی در نگاه تولســـتوی روشن است و احتمالاً آن مسئله را هم با نگاه به همین داستان طرح کرده است.

چون زمان حرکت محدود اســـت، پس محیط زمینی که پاهوم می‌تواند محصور کند هم محدود و ثابت است. اکنون سؤال این است: «پاهوم روی چه مســـیری حرکت کند تا زمینش حداکثر مساحت را داشته باشد؟! مربع، شش‌ضلعی، یا دایره؟» به زبان ریاضی: از بین سه شکل مربع، شش‌ضلعی و دایره با محیط‌های برابر، کدام‌یک مساحت بیشتری دارد؟ پاسخ به این سؤال چندان دشوار نیست. اگر محیط هر ســـه شکل مساوی مقدار معین L باشد، در این صورت با فرض اینکه طول ضلع مربع a باشد، $4a=L$ و در نتیجه $a=\frac{L}{4}$ و مساحت مربع نیز برابر است با:

$$S=a^2=\frac{L^2}{16}$$

در مورد شش‌ضلعی داریم:

$$6a=L\Rightarrow a=\frac{L}{6},S=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{\sqrt{3}L^2}{24}$$

و در مورد دایره:

$$2\pi r=L\Rightarrow r=\frac{L}{2\pi},S=\pi r^2=\frac{L^2}{4\pi}$$

از مقایسه این سه مقدار به سادگی متوجه می‌شویم که مساحت دایره از شـــش‌ضلعی بیشتر و مساحت شش‌ضلعی هم از مربع بیشتر اســـت. به‌طور شهودی احساس می‌شود، اگر شـــکل بسته به‌صورت چندضلعی منتظم با تعداد ضلع‌های بیشـــتری باشـــد، مساحت آن بیشـــتر می‌شود. لذا هرچه به دایره نزدیک‌تر شود، مساحت بیشتری خواهد داشت.

اگرچه در داســـتان تولســـتوی طمع پاهوم او را گرفتار کرد و در نهایـــت چند دقیقـــه قبل از غروب آفتـــاب، در پایان راه‌پیمایی

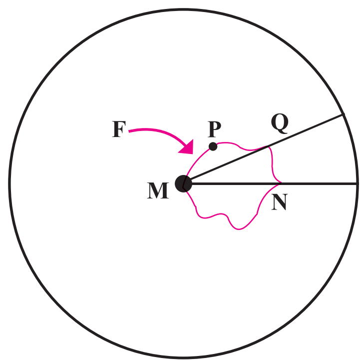
از بین همهٔ شکل‌های بستهٔ هندسی با محیط ثابت، دایره دارای بیشترین مساحت است

طولانی‌اش (که برای زیاد کردن زمینش مرتباً آن را بیشتر می‌کرد!) جان به جان آفرین تسلیم کرد، اما واقعیت این است که او برای آنکه مساحت زمینش را حداکثر کند، باید مسیری دایره شکل را می‌پیمود! و این یک قضیهٔ معروف ریاضی موسوم به «قضیهٔ هم پیرامونی» است که می‌گوید:

از بین همهٔ شکل‌های بستهٔ هندسی با محیط ثابت، دایره دارای بیشترین مساحت است.

در اینجا می‌کوشیم با زبانی ساده اثباتی مقدماتی از این قضیه ارائه دهیم. ابتدا باید به پاسخ این سؤال بپردازیم که: چرا منحنی‌های بسته با محیط معلوم L، دارای مساحت محدود هستند؟

نقطهٔ M را روی منحنی بستهٔ F که طول محیط آن L است در نظر می‌گیریم و دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{L}{۲}$ رسم می‌کنیم (شکل ۱).



شکل ۱.

نقطهٔ N را روی منحنی بسته چنان اختیار می‌کنیم که طول کمان MN برابر با نصف محیط F، یعنی برابر $\frac{L}{۲}$ باشد. وتر MN از شکل F کوچک‌تر از کمان MN است؛ یعنی: $MN < \frac{L}{۲}$. بنابراین N درون دایره قرار می‌گیرد.

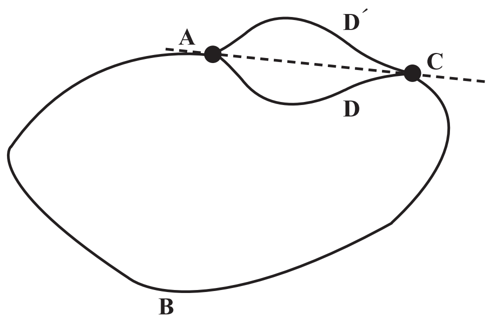
نقطهٔ دلخواه Q را روی شکل F در نظر می‌گیریم. چون وتر MQ کوچک‌تر از کمان MPQ است و کمان MPQ نیز کوچک‌تر از نصف محیط است، بنابراین: $MQ < \frac{L}{۲}$. یعنی Q نیز درون دایره $(M, \frac{L}{۲})$ واقع است. پس کل شکل F با محیط L در درون دایره‌ای به شعاع $\frac{L}{۲}$ واقع می‌باشد و مساحت آن همواره از $\pi(\frac{L}{۲})^۲$ کوچک‌تر است.

اکنون قبل از اثبات درستی نظریهٔ حدس زده شده، به یک تعریف و اثبات چند لم می‌پردازیم.

تعریف: یک شکل را هنگامی «شکل ماکزی‌مم» گوییم که بین شکل‌های هم محیط با خود دارای بیشترین سطح باشد.

لم ۱. هر شکل ماکزی‌مم که محیط آن داده شده، محدب است. نشان می‌دهیم که اگر شکل ماکزی‌مم مقعر باشد، به تناقض برمی‌خوریم.

منحنی بسته و مقعر ABCDA را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم این شکل ماکزی‌مم است (شکل ۲).



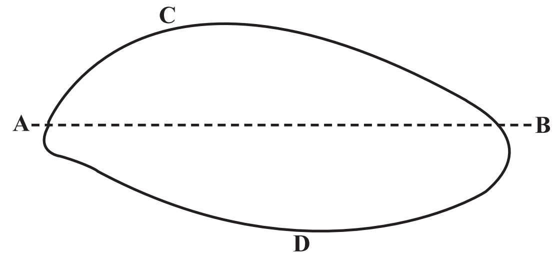
شکل ۲.

قرینهٔ کمان ADC را نسبت به خط AC، کمان CD´A می‌نامیم. محیط هر دو منحنی بسته برابرند، اما مساحت منحنی ABCD´A بیشتر از مساحت منحنی ABCDA است که این مغایر با ماکزی‌مم بودن منحنی بسته و مقعر ABCDA است. بنابراین فرض مقعر بودن «شکل ماکزی‌مم» باطل است.

لم ۲. اگر منحنی F، یک شکل ماکزی‌مم باشد، هر وتری که محیط F را نصف کند، مساحت داخل این منحنی را نیز نصف می‌کند.

منحنی بسته F را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که این منحنی ماکزی‌مم است (یعنی F شکلی است که مساحتش از مساحت تمام منحنی‌های بسته‌ای که محیطشان برابر محیط منحنی F است، بیشتر است). روی منحنی F نقطهٔ دلخواه A را در نظر می‌گیریم. روی این منحنی نقطهٔ یکتای B وجود دارد، به‌طوری‌که وتر AB محیط منحنی را نصف می‌کند (شکل ۳). یعنی

طول کمان ACB برابر طول کمان ADB است. حکم این است که مساحت قطعهٔ ADB برابر مساحت قطعه ACB است. برای اثبات این حکم، ثابت می‌کنیم که اگر خلاف آن را بپذیریم به تناقض می‌رسیم.



شکل ۳.

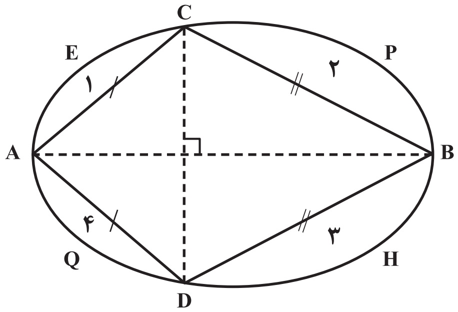
به این منظور فرض می‌کنیم که مساحت قطعهٔ ADB بزرگ‌تر از مساحت قطعهٔ ACB است. قرینهٔ قطعهٔ ADB را نسبت به خط AB می‌سازیم و آن را $AD'B$ می‌نامیم. محیط منحنی $ADBD'A$ حاصل از اجتماع دو کمان ADB و $AD'B$ با محیط منحنی F مساوی است، اما مساحت آن‌که دو برابر مساحت قطعهٔ ADB است، بیش از مساحت F است که نشان می‌دهد، منحنی F ماکزی‌مم نیست. اگر بپذیریم که مساحت قطعهٔ ADB کوچک‌تر از مساحت قطعهٔ ACB است، با به‌کارگیری همان شیوه استدلال قید شده در بالا به تناقض می‌رسیم.

از لم ۲ علاوه بر نتیجهٔ «هر وتری که محیط یک شکل ماکزی‌مم را نصف کند، مساحت آن را نیز نصف می‌کند» می‌توان نتیجهٔ دیگری نیز گرفت؛ اینکه: «شکل ماکزی‌مم دارای محور تقارن است.» چرا که اگر قرینهٔ نصف شکل ماکزی‌مم F را نسبت به آن وتر رسم کنیم، به شکل F' می‌رسیم که دارای محور تقارن و هم‌محیط و هم‌مساحت با F است. پس می‌توان نتیجه گرفت که اگر F یک منحنی بستهٔ ماکزی‌مم باشد، قطعاً محور تقارن خواهد داشت.

لم ۳. مساحت مثلث ABC با فرض ثابت بودن اندازه‌های AC و BC در صورتی به حداکثر می‌رسد که مثلث در رأس C، قائمه باشد.

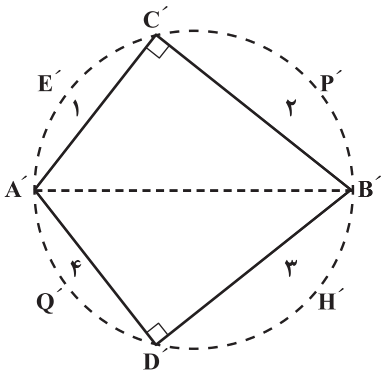
اثبات: با توجه به فرمول محاسبهٔ مساحت مثلث، یعنی $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AC\times BC\times \sin\hat{C}$، اگر AC و BC ثابت باشند، حداکثر S در صورتی رخ می‌دهد که $\sin\hat{C}$ به حداکثر برسد؛ یعنی $\hat{C}=۹۰^\circ$.

قضیه: بین تمام شکل‌های سطح که دارای محیط برابرند، دایره بزرگ‌ترین مساحت را دارد. فرض می‌کنیم منحنی بستهٔ شکل ۴ همان شکل ماکزی‌مم F با محور تقارن AB است. نقطهٔ دلخواه C را اختیار می‌کنیم و قرینهٔ آن را نسبت به AB، D می‌نامیم. ادعا می‌کنیم چهارضلعی ACBD در رأس‌های C و D قائمه‌اند.



شکل ۴.

برای اثبات این حکم ثابت می‌کنیم که اگر خلاف آن را بپذیریم، به تناقض می‌رسیم. اگر هر دو زاویهٔ ACB و ADB قائمه نباشند، آن‌گاه چهارضلعی $A'C'B'D'$ را طوری می‌سازیم که زاویه‌های C' و D' قائمه و اضلاع $A'C'$، $C'B'$، $B'D'$ و $D'A'$ به ترتیب با AC، CB، BD و DA برابر باشند. حال روی اضلاع، چهارضلعی $A'C'B'D'$ چهار کمان $A'E'C'$، $C'P'B'$، $B'H'D'$ و $D'Q'A'$ را به ترتیب مساوی (قابل انطباق) با کمان‌های AEC، CPB، BHD و DQA رسم می‌کنیم و منحنی جدید را F' می‌نامیم.



شکل ۵.

منحنی F' شامل ۵ قطعه است:

۱. قطعهٔ $A'E'C'$ که قابل انطباق با قطعهٔ AEC از F است.

۲. قطعهٔ $C'P'B'$ که قابل انطباق با قطعهٔ CPB از F است.

۳. قطعهٔ $C'E'D'$ که قابل انطباق با قطعهٔ CED از F است.

۴. قطعهٔ $D'Q'A'$ که قابل انطباق با قطعهٔ DQA از F است.

۵. چهارضلعی $A'C'B'D'$ که دارای مساحتی بزرگ‌تر از مساحت چهارضلعی ACBD از F است ($S_{B'A'D'}>S_{BDA}, S_{A'C'B'}>S_{ACB}$).

پس مساحت F' بزرگ‌تر از مساحت F است که خلاف ماکزی‌مم بودن شکل F است. در نتیجه فرض غیرقائمه بودن زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{D}$ باطل است. بنابراین هر وتری که محیط منحنی ماکزی‌مم F را به دو کمان هم طول بخش کند، از تمامی نقاط منحنی F به زاویهٔ قائمه دیده می‌شود. پس منحنی F که شکلی ماکزی‌مم است، در واقع دایره است.